CONSTRUCCIÓN DEL PROCESO DE WIENER

Miguel Ángel García Álvarez

1. Introducción

Si bien la concepción mecanicista de la naturaleza sufrió serios reveses durante los siglos XIX y XX, alcanzó éxitos importantes, uno de los cuales fue la teoría cinética de la materia. Los fenómenos del calor, por ejemplo, pudieron ser explicados por los movimientos de partículas que actuan unas sobre otras mediante fuerzas simples.

De acuerdo con la teoría cinética de la materia, un gas, por ejemplo, está constituido por una cantidad enorme de moléculas las cuales se mueven en todas direcciones y chocan las unas con las otras. El calor del gas no es entonces más que la energía cinética del movimiento molecular.

Lo mismo ocurre con un líquido, el cual estaría constituido por moléculas que se mueven en todas direcciones y chocan las unas con las otras. El acuerdo de esta idea con la realidad fue verificada por Albert Einstein al explicar, utilizando la teoría cinética, el movimiento que se observa, en un microscopio, de un grano de polen suspendido en agua.

En el año 1827 el botánico inglés Robert Brown observó que en una solución de agua el polen de cierta hierba (Clarkia pulchella) realizaba un movimiento continuo, muy accidentado, en zigzag.

"Mientras examinaba la forma de esas partículas inmersas en el agua, observé que muchas de ellas estaban manifiestamente en movimiento... Esos movimientos eran tales que, después de observaciones a menudo repetidas, me persuadí de que no podían provenir ni de la corriente del fluido, ni de su evaporación gradual, sino que pertenecían a la partícula misma."

Brown había leido los comentarios de quienes antes se habían percatado de ese fenómeno y observó que tendían a asociarlo con la materia orgánica, asumiendo que estaba ligado con los mecanismos de la vida. Decía que se asumía que se trataba de ".. moléculas elementales de cuerpos orgánicos, primero consideradas así por Buffon y Needhan y después por Wrisberg con gran precisión, más adelante y todavía con mayor particularidad por Muller y muy recientemente por Milne Edwards, quien había reavivado su estudio apoyándolo con muchos detalles interesantes."

El gran mérito de Brown fue el no dejarse persuadir fácilmente. Una vez que observó el fenómeno con especímenes de plantas vivas se preguntó si persistiría en plantas que estuvieran muertas. Observó entonces el mismo fenómeno con granos de polen prservados durante 11 meses en una solución alcohólica, especificamente de Viola tricolor, Zizania acuática y Zea. También puso dentro de un recipiente con agua el polen de plantas que habían muerto cien años antes. Observó que este polen también realizaba el mismo tipo de movimiento. Brown relata su sorpresa de la forma siguiente: ".... me llamó la atención este hecho tan inesperado de aparente vitalidad retenida por estas moléculas tanto tiempo después de la muerte de la planta."

Brown pasó a considerar especímenes claramente no vivos, incluyendo rocas de todas las edades, las cuales apórtaban partículas en abundancia. Concluyó que con cualquier mineral sólido se observa el fenómeno a condición de reducirlo a la forma de granos suficientemente finos.

Una de las cosas más sorprendentes de estas observaciones es que el movimiento de las partículas suspendidas parece no cesar nunca, lo cual entra en contradicción con el principio de conservación de la energía.

La explicación de Einstein de este fenómeno fue que las partículas brownianas visibles al microscopio son golpeadas por las partículas más pequeñas que constituyen el agua. El movimiento browniano existe si las partículas bombardeadas son suficientemente pequeñas. Existe porque ese bombardeo no tiene lugar de una manera uniforme de todos los lados. El caracter irregular y contingente del camino que recorren las partículas brownianas refleja una irregularidad similar de los caminos que recorren las partículas más pequeñas que constituyen la materia.

El movimiento observado por Brown se constituyó en una evidencia de la teoría molecular ya que la única explicación que se encontró para tal movimiento fue que los granos de polen se mueven al ser golpeados por las moléculas de agua. Con base en esta explicación, Albert Einstein encontró que la posición de un grano de polen puesto sobre el agua puede ser descrito probabilisticamente mediante una distribución normal. Años después, en 1910, Jean Perrin realizó un estudio detallado del movimiento browniano y, apoyándose en un trabajo realizado en 1888 por Louis Georges Gouy, llegó a las siguientes conclusiones respecto al movimiento que siguen pequeñas partículas que se colocan sobre un fluido:

1. El movimiento es irregular, van, vienen, suben y bajan.

2. Las trayectorias que siguen las partículas son funciones continuas pero no derivables.

3. El movimiento no se debe a las vibraciones transmitidas al fluido, ya que se observa de la misma manera bajo diversas circunstancias.

4. El movimiento tampoco se debe a las corrientes que existen en el fluido cuando no se ha alcanzado el equilibrio térmico, ya que no se observa algún cambio significativo cuando se alcanza ese equilibrio.

5. Se descarta que el movimiento sea como el que se observa en las partículas de polvo que se encuentran en el aire, ya que en estas últimas las partículas vecinas se mueven en la misma dirección, mientras que los movimientos de las partículas colocadas sobre el fluido y que se encuentran cercanas, son independientes unos de otros.

6. La naturaleza de las partículas que se colocan sobre el fluido parece no tener relevancia.

7. El movimiento nunca cesa.

Lo que hizo Norbert Wiener fue construir una medida de probabilidad sobre el conjunto de las posibles trayectorias que puede seguir una de esas partículas colocadas sobre un fluido.

Sea W_t la posición de la partícula en el tiempo $t \in \mathbb{R}^+$.

Se tiene entonces:

1. Las posibles trayectorias $t \to W_t$ son funciones continuas
2. $E[W_t] = 0$ para toda t
3. Dados $0 \leq s < t$, $W_t - W_s$ es independiente de la trayectoria seguida hasta el tiempo s.
4. Dados $0 \leq s < t$, la distribución de $W_t - W_s$ es normal con media cero y varianza $t - s$.

Se busca entonces construir un modelo probabílistico para el movimiento browniano. Esto significa definir un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y, para cada $t \in \mathbb{R}^+$, una variable aleatoria $W_t : \Omega \to \Re$ de tal manera que la familia $(W_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ tenga las propiedades mencionadas.

2. Construcción del proceso de Wiener

Hay varias maneras de construir el proceso de Wiener; aquí vamos a seguir básicamente el método que utilizó Paul Lévy.

PARTE 1.

Se toma un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ en el cual sea posible definir un conjunto de variables aleatorias independientes $\{Z_t : t \in D\}$, todas ellas con distribución normal estándar. Es interesante que para poder hacer esto, basta con tomar como espacio de probabilidad a la terna $([0,1], \mathcal{L}, P)$, donde $\mathcal{L}$ es la σ-álgebra de los conjuntos Lebesgue medibles en el intervalo $[0,1]$ y P es la medida de Lebesgue en el intervalo $[0,1]$.

También es interesante y curioso que como espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ en el cual se pueda definir el proceso $(W_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ se puede tomar el espacio $([0,1], \mathcal{L}, P)$; es decir, el intervalo $[0,1]$, con la medida de Lebesgue (que no es más que una extensión del concepto de longitud) es suficientemente rico como para poder definir en ese espacio el proceso de Wiener.

Recordemos que los racionales diádicos son los números racionales de la forma $\frac{j}{2^n}$, donde $n \in \{0, 1, \ldots\}$ y j es un número entero. Recordemos también que el conjunto de racionales diádicos en un intervalo (a,b), es denso en $[a,b]$. Denotaremos por D al conjunto de racionales diádicos contenidos en el intervalo $[0,1]$.

Proposición 1. *Se puede definir, sobre $([0,1], \mathcal{L}, P)$, una sucesión de variables aleatorias independientes $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tales que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, la distribución de X_n es normal estándar.*

Demostración

Consideremos una sucesión de variables aleatorias independientes $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definidas sobre $([0,1], \mathcal{L}, P)$, cada una de ellas con distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos las funciones $F_n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$

F_n es una función continua estrictamente creciente, así que tiene una inversa continua. Denotemos por c_n a la inversa de F_n. c_n es entonces una función continua definida en el intervalo $(0, 1)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $X_n = c_n(U_n)$.

Si $x \in \mathbb{R}$, se tiene:

$P[X_n \leq x] = P[c_n(U_n) \leq x] = P[U_n) \leq c_n^{-1}(x)] = P[U_n) \leq F_n(x)] = F_n(x)$

Así que X_n tiene distribución normal estándar.

Finalmente, como las variables aleatorias $U_1, U_2, \ldots$ son independientes, también lo son $X_1, X_2, \ldots$.

■

Siendo D un conjunto numerable, podemos denotar por $t_1, t_2, t_3, \ldots$ a sus elementos, así que lo que queremos definir es una familia de variables aleatorias independientes $\{Z_{t_n} : n \in \mathbb{N}\}$, todas ellas con distribución normal estándar. El resultado anterior muestra que las podemos definir sobre el espacio de probabilidad $([0, 1], \mathcal{L}, P)$.

PARTE 2.

Se define una nueva familia de variables aleatorias $\{B_t : t \in D\}$. Esto se hace por pasos (inductivamente), para lo cual se define, para cada $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, el conjunto D_n formado por los racionales diádicos en el intervalo $[0, 1]$ de la forma $\frac{k}{2^n}$; es decir:

$D_n = \left\{\frac{k}{2^n} : k \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^n\}\right\}$

Obsérvese que, para cualquier $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, D_n tiene $2^n + 1$ elementos y $D_{n+1} \supset D_n$, así que $D_{n+1} - D_n$ tiene $2^{n+1} - 2^n = 2^n$ elementos.

Comenzando con $D_0 = \{0, 1\}$, se define:

$B_0 = 0$

$B_1 = Z_1$

Siguiendo con $D_1 = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$, para el cual ya tenemos definidas B_0 y B_1. Definamos la que falta:

$B_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(B_0 + B_1) + \frac{1}{2} Z_{\frac{1}{2}}$

Continuando con $D_2 = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$, para el cual ya tenemos definidas B_0, $B_{\frac{1}{2}}$ y B_1. Definamos las que faltan:

$B_{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\left(B_0 + B_{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} Z_{\frac{1}{4}}$

$B_{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\left(B_{\frac{1}{2}} + B_1\right) + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} Z_{\frac{3}{4}}$

Un paso más, para tener más clara la construcción. Para $D_3 = \left\{0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, 1\right\}$ ya tenemos definidas B_0, $B_{\frac{1}{4}}$, $B_{\frac{1}{2}}$, $B_{\frac{3}{4}}$ y B_1. Definamos las que faltan:

$B_{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}\left(B_0 + B_{\frac{1}{4}}\right) + \frac{1}{2^2} Z_{\frac{1}{8}}$

$B_{\frac{3}{8}} = \frac{1}{2}\left(B_{\frac{1}{4}} + B_{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{2^2} Z_{\frac{3}{8}}$

$B_{\frac{5}{8}} = \frac{1}{2}\left(B_{\frac{1}{2}} + B_{\frac{3}{4}}\right) + \frac{1}{2^2} Z_{\frac{5}{8}}$

$B_{\frac{7}{8}} = \frac{1}{2}\left(B_{\frac{3}{4}} + B_1\right) + \frac{1}{2^2} Z_{\frac{7}{8}}$

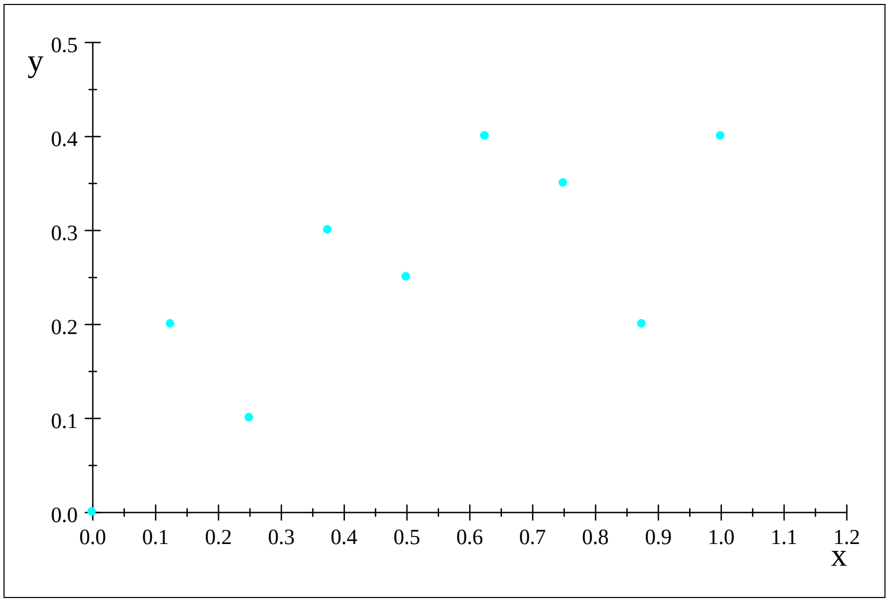
Continuando con este procedimiento, podemos ver que para $D_n = \left\{0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \frac{4}{2^n}, \frac{5}{2^n}, \frac{6}{2^n}, \ldots, 1\right\}$, las variables aleatorias que aún no están definidas son las que corresponden a los elementos de D_n con numerador impar. Cada una de ellas se define como sigue:

Si $j \in \{1, 3, 5, \ldots, 2^n - 1\}$ definimos:

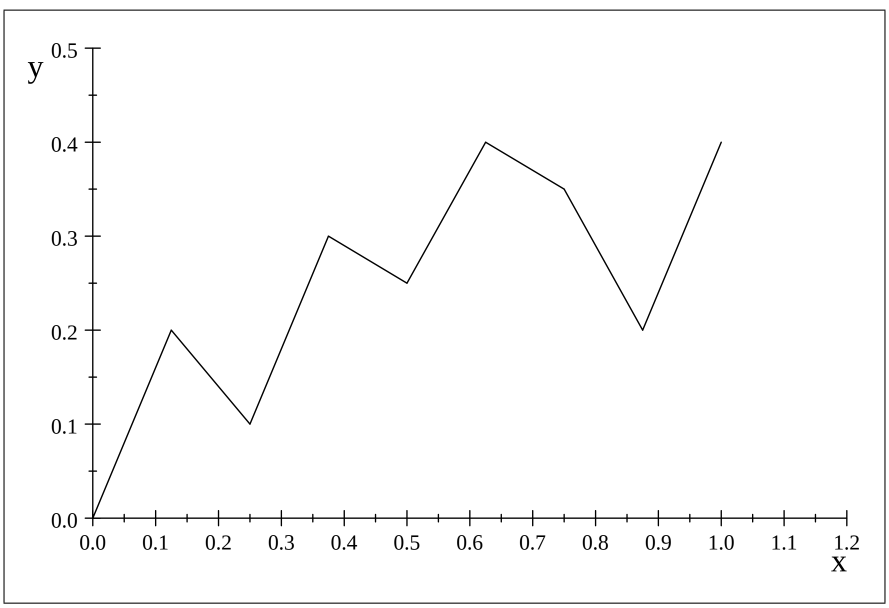
$B_{\frac{j}{2^n}} = \frac{1}{2}\left(B_{\frac{j-1}{2^n}} + B_{\frac{j+1}{2^n}}\right) + \frac{1}{2^{\frac{1}{2}(n+1)}} Z_{\frac{j}{2^n}}$

De esta manera, para cada elemento $t \in D_n$ se tiene definida una variable aleatoria B_t. Denotando por $t_0, t_1, \ldots, t_{2^n}$ a los elementos de D_n, para cada $\omega \in \Omega$ se consideran los siguientes $2^n + 1$ elementos de $\mathbb{R}^2$:

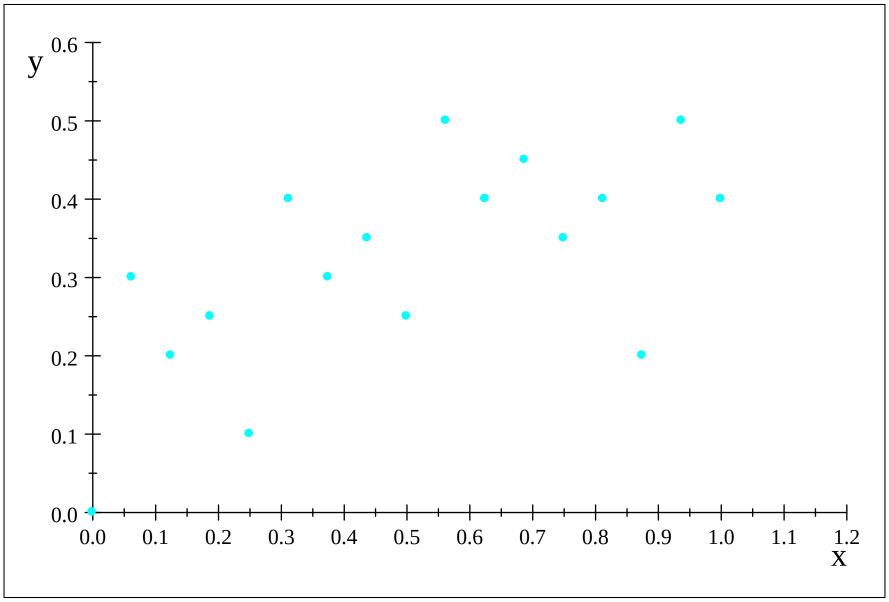
$\left(t_0, B_{t_0}(\omega)\right), \left(t_1, B_{t_1}(\omega)\right), \left(t_2, B_{t_2}(\omega)\right), \ldots, \left(t_{2^n}, B_{t_{2^n}}(\omega)\right)$

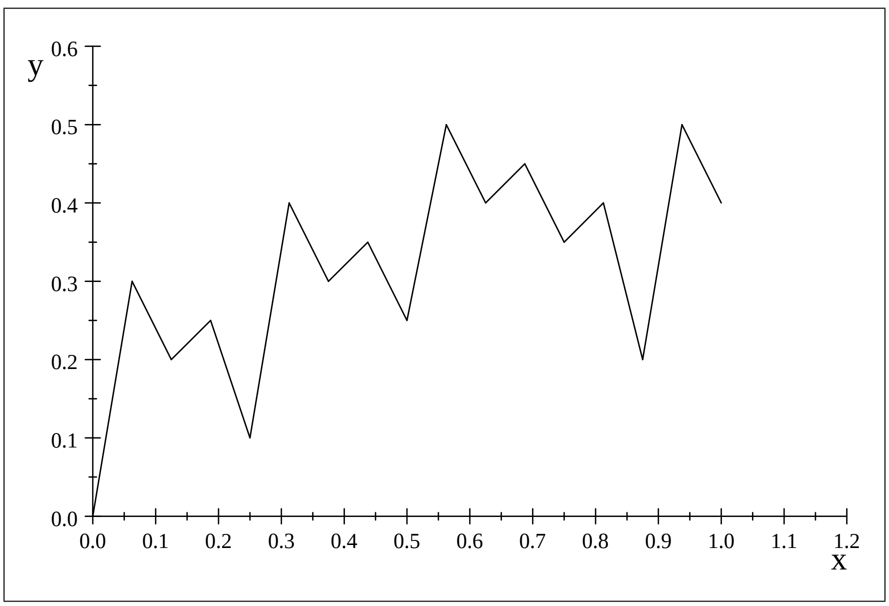


Ahora, cada par de puntos consecutivos se unen mediante un segmento de recta para obtener la gráfica de una función continua (lineal por pedazos) definida en el intervalo $[0,1]$. Denotemos por $f_n^{(\omega)}$ a esa función.



Obsérvese que, fijando ω, si $t \in D_n$, entonces $t \in D_m$ y $f_m^{(\omega)}(t) = f_n^{(\omega)}(t)$ para cualquier $m > n$. Es decir, una vez que se llega a un elemento $t \in D$ y se define B_t, esta variable aleatoria no cambia; en los pasos siguientes se conserva su valor y únicamente se definen las variables aleatorias B_t para los nuevos elementos t que se obtienen en cada paso.





Mostremos ahora que las variables aleatorias de la familia $\{B_t : t \in D\}$ satisfacen las propiedades que se requieren para obtener finalmente un proceso de Wiener. Para esto, vamos a formalizar la construcción de la familia $\{B_t : t \in D\}$ con un razonamiento de inducción.

Recordemos que, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, se define una familia de variables aleatorias $\{B_t : t \in D_n\}$, donde $D_n = \left\{\frac{k}{2^n} : k \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^n\}\right\}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos los vectores $B^{(n)}$ y $Z^{(n)}$ de la siguiente manera:

$$B^{(n)} = \left(B_{\frac{1}{2^n}} - B_0, B_{\frac{2}{2^n}} - B_{\frac{1}{2^n}}, B_{\frac{3}{2^n}} - B_{\frac{2}{2^n}}, \ldots, B_{\frac{2^n}{2^n}} - B_{\frac{2^n-1}{2^n}}\right)$$

$Z^{(n)} = \left(Z_{\frac{1}{2^n}}, Z_{\frac{2}{2^n}}, Z_{\frac{3}{2^n}}, \ldots, Z_{\frac{2^n}{2^n}} \right)$

Los escribimos horizontalmente por comodidad, pero los vamos a ver como vectores columna.

Vamos a demostrar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, la familia de variables aleatorias $\{B_t : t \in D_n\}$, construidas como se explicitó antes, satisface las siguientes propiedades:

1. Las variables aleatorias de la familia $\{B_t : t \in D_n\}$ dependen únicamente de las variables aleatorias de la familia $\{Z_t : t \in D_n\}$.

2. Existe una matriz invertible $A^{(n)}$, de $2^n \times 2^n$, tal que $B^{(n)} = A^{(n)} Z^{(n)}$.

3. Las variables aleatorias de la familia $\left\{ B_{\frac{1}{2^n}} - B_0, B_{\frac{2}{2^n}} - B_{\frac{1}{2^n}}, B_{\frac{3}{2^n}} - B_{\frac{2}{2^n}}, \ldots, B_{\frac{2^n}{2^n}} - B_{\frac{2^n-1}{2^n}} \right\}$ son independientes y cada una de ellas tiene distribución normal con media 0 y varianza $\frac{1}{2^n}$.

Antes de comenzar con la demostración general, veamos que en los primeros pasos se tienen estas propiedades.

Recordemos que para $D_0 = \{0, 1\}$, se define:

$B_0 = 0$

$B_1 = Z_1$

Para $D_1 = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$, se define:

$B_0 = 0$

$B_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(B_0 + B_1) + \frac{1}{2} Z_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} Z_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} Z_1$

$B_1 = Z_1$

Así que:

1. Las variables aleatorias B_0, $B_{\frac{1}{2}}$ y B_1 dependen únicamente de $Z_{\frac{1}{2}}$ y Z_1.

2. Se tiene:

$B_{\frac{1}{2}} - B_0 = \frac{1}{2} Z_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} Z_1$

$B_1 - B_{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} Z_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} Z_1$

Así que:

$$B^{(1)} = \begin{pmatrix} B_{\frac{1}{2}} - B_0 \\ B_1 - B_{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{\frac{1}{2}} \\ Z_1 \end{pmatrix}$$

La matriz $A^{(1)}$ es entonces la matriz $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, la cual es invertible ya que su determinante es $\frac{1}{2}$.

3. Por el lema demostrado antes, las variables aleatorias $B_{\frac{1}{2}}-B_0$ y $B_1-B_{\frac{1}{2}}$ son independientes y ambas tienen distribución normal con media 0 y varianza $\frac{1}{2}$.

Para $D_2 = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$, se define:

$B_0 = 0$

$B_{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\left(B_0 + B_{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} Z_{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} Z_{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4} Z_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} Z_1$

$B_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(B_0 + B_1\right) + \frac{1}{2} Z_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} Z_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} Z_1$

$B_{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\left(B_{\frac{1}{2}} + B_1\right) + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} Z_{\frac{3}{4}} = \frac{1}{4} Z_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} Z_{\frac{3}{4}} + \frac{3}{4} Z_1$

$B_1 = Z_1$

Así que:

1. Las variables aleatorias B_0, $B_{\frac{1}{4}}$, $B_{\frac{1}{2}}$, $B_{\frac{3}{4}}$ y B_1 dependen únicamente de $Z_{\frac{1}{4}}$, $Z_{\frac{1}{2}}$, $Z_{\frac{3}{4}}$ y Z_1.

2. Se tiene:

$B_{\frac{1}{4}} - B_0 = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} Z_{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4} Z_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} Z_1$

$B_{\frac{1}{2}} - B_{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} Z_{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4} Z_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} Z_1$

$B_{\frac{3}{4}} - B_{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4} Z_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} Z_{\frac{3}{4}} + \frac{1}{4} Z_1$

$B_1 - B_{\frac{3}{4}} = -\frac{1}{4} Z_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} Z_{\frac{3}{4}} + \frac{1}{4} Z_1$

Así que:

$$B^{(2)} = \begin{pmatrix} B_{\frac{1}{4}} - B_0 \\ B_{\frac{1}{2}} - B_{\frac{1}{4}} \\ B_{\frac{3}{4}} - B_{\frac{1}{2}} \\ B_1 - B_{\frac{3}{4}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{\frac{1}{4}} \\ Z_{\frac{1}{2}} \\ Z_{\frac{3}{4}} \\ Z_1 \end{pmatrix}$$

La matriz $A^{(2)}$ es entonces la matriz $\begin{pmatrix} \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, la cual es invertible ya que su determinante es $\frac{1}{16}$.

3. Por la propiedad 2, el vector $B^{(2)}$ tiene distribución normal multivariada, así que para demostrar que sus componentes forman una familia de variables aleatorias independientes, basta con probar que son independientes por parejas.

Se tiene:

$B_{\frac{1}{4}} - B_0 = \frac{1}{2}\left(B_{\frac{1}{2}} - B_0\right) + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} Z_{\frac{1}{4}}$

$B_{\frac{1}{2}} - B_{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\left(B_{\frac{1}{2}} - B_0\right) - \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} Z_{\frac{1}{4}}$

$B_{\frac{3}{4}} - B_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(B_1 - B_{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} Z_{\frac{3}{4}}$

$B_1 - B_{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\left(B_1 - B_{\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} Z_{\frac{3}{4}}$

Además, sabemos que:

$\frac{1}{2}\left(B_{\frac{1}{2}} - B_0\right)$ y $\frac{1}{2}\left(B_1 - B_{\frac{1}{2}}\right)$ son independientes y ambas tienen distribución normal con media cero y varianza $\frac{1}{8}$.

$\frac{1}{2}\left(B_{\frac{1}{2}} - B_0\right)$ y $\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} Z_{\frac{1}{4}}$ son independientes y ambas tienen distribución normal con media cero y varianza $\frac{1}{8}$.

$\frac{1}{2}\left(B_{\frac{1}{2}} - B_0\right)$ y $\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} Z_{\frac{3}{4}}$ son independientes y ambas tienen distribución normal con media cero y varianza $\frac{1}{8}$.

$\frac{1}{2}\left(B_1 - B_{\frac{1}{2}}\right)$ y $\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} Z_{\frac{1}{4}}$ son independientes y ambas tienen distribución normal con media cero y varianza $\frac{1}{8}$.

$\frac{1}{2}\left(B_1 - B_{\frac{1}{2}}\right)$ y $\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} Z_{\frac{3}{4}}$ son independientes y ambas tienen distribución normal con media cero y varianza $\frac{1}{8}$.

$\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} Z_{\frac{3}{4}}$ y $\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} Z_{\frac{3}{4}}$ son independientes y ambas tienen distribución normal con media cero y varianza $\frac{1}{8}$.

Así que:

$E\left[\left(B_{\frac{1}{4}}-B_0\right)\left(B_{\frac{1}{2}}-B_{\frac{1}{4}}\right)\right]=E\left[\frac{1}{4}\left(B_{\frac{1}{2}}-B_0\right)^2-\frac{1}{2^3}\left(Z_{\frac{1}{4}}\right)^2\right]$

$=E\left[\frac{1}{4}\left(B_{\frac{1}{2}}-B_0\right)^2\right]-E\left[\frac{1}{2^3}\left(Z_{\frac{1}{4}}\right)^2\right]=\frac{1}{8}-\frac{1}{8}=0$

$E\left[\left(B_{\frac{1}{4}}-B_0\right)\left(B_{\frac{3}{4}}-B_{\frac{1}{2}}\right)\right]=E\left[\left(\frac{1}{2}\left(B_{\frac{1}{2}}-B_0\right)+\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}Z_{\frac{1}{4}}\right)\frac{1}{2}\left(B_1-B_{\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}Z_{\frac{3}{4}}\right]=0$

Y así sucesivamente.

Por lo tanto las componentes de $B^{(2)}$ son independientes por parejas.

Queda entonces demostrada la propiedad 3.

Pasemos ahora a la demostración completa, por inducción.

Para $n=1$, ya está demostrado que se satisfacen las tres propiedades.

Supongamos ahora que las variables aleatorias de la familia $\{B_t : t \in D_m\}$, donde $m \in \mathbb{N}$, satisfacen las tres propiedades. Demostremos entonces que las variables aleatorias de la familia $\{B_t : t \in D_{m+1}\}$ también las satisfacen.

Recordemos que, para $j \in \{0, 2, 4, 6, \ldots, 2^{m+1}\}$ la variable aleatoria $B_{\frac{j}{2^{m+1}}}$ es una variable aleatoria de la familia $\{B_t : t \in D_m\}$, mientras que, para $j \in \{1, 3, 5, \ldots, 2^{m+1}-1\}$, se define:

$B_{\frac{j}{2^{m+1}}}=\frac{1}{2}\left(B_{\frac{j-1}{2^{m+1}}}+B_{\frac{j+1}{2^{m+1}}}\right)+\frac{1}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}}Z_{\frac{j}{2^{m+1}}}$

Cada una de estas variables aleatorias está definida en términos de elementos de las variables aleatorias de las familas $\{B_t : t \in D_m\}$ y $\{Z_t : t \in D_{m+1}\}$. Por la hipótesis de inducción, las variables aleatorias de la familia $\{B_t : t \in D_m\}$ dependen únicamente de las variables aleatorias de la familia $\{Z_t : t \in D_m\}$. Por lo tanto, las variables aleatorias de la familia $\{B_t : t \in D_{m+1}\}$ dependen únicamente de las variables aleatorias de la familia $\{Z_t : t \in D_{m+1}\}$.

Así que tenemos demostrada la propiedad 1.

Pasemos a probar la propiedad 2.

Por la hipótesis de inducción, existe una matriz invertible $A^{(m)}$, de $2^m \times 2^m$, tal que $B^{(m)} = A^{(m)}Z^{(m)}$.

Ahora:

Si $j \in \{1, 3, 5, \ldots, 2^{m+1}-1\}$, se tiene:

$B_{\frac{j}{2^{m+1}}}-B_{\frac{j-1}{2^{m+1}}}=\frac{1}{2}\left(B_{\frac{j-1}{2^{m+1}}}+B_{\frac{j+1}{2^{m+1}}}\right)+\frac{1}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}}Z_{\frac{j}{2^{m+1}}}-B_{\frac{j-1}{2^{m+1}}}$

$= \frac{1}{2}\left(B_{\frac{j+1}{2^{m+1}}} - B_{\frac{j-1}{2^{m+1}}}\right) + \frac{1}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}} Z_{\frac{j}{2^{m+1}}}$

Si $j \in \{2, 4, 6, \dots, 2^{m+1}\}$, se tiene:

$B_{\frac{j}{2^{m+1}}} - B_{\frac{j-1}{2^{m+1}}} = B_{\frac{j}{2^{m+1}}} - \frac{1}{2}\left(B_{\frac{j-2}{2^{m+1}}} + B_{\frac{j}{2^{m+1}}}\right) - \frac{1}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}} Z_{\frac{j-1}{2^{m+1}}}$

$= \frac{1}{2}\left(B_{\frac{j}{2^{m+1}}} - B_{\frac{j-2}{2^{m+1}}}\right) - \frac{1}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}} Z_{\frac{j-1}{2^{m+1}}}$

Vamos a demostrar ahora que $\left|A^{(m+1)}\right| = \left(\frac{1}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}}\right)^{2^m} \left|A^{(m)}\right|$; así que, $\left|A^{(m+1)}\right| \neq 0$, por lo tanto, la matriz $A^{(m+1)}$ es invertible.

La demostración es simple, pero laboriosa; si quieren, pueden saltársela.

Sea (a_{ij}) la matriz $A^{(m)}$, entonces, por las expresiones de los incrementos de las variables aleatorias de la familia $\{B_t : t \in D_{m+1}\}$, se tiene:

$A^{(m+1)} =$

$$\begin{pmatrix}
\frac{1}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}} & \frac{1}{2}a_{11} & 0 & \frac{1}{2}a_{12} & 0 & \frac{1}{2}{}_{13} & 0 & \frac{1}{2}a_{14} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2}a_{12^m} \\
-\frac{1}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}} & \frac{1}{2}a_{11} & 0 & \frac{1}{2}a_{12} & 0 & \frac{1}{2}a_{13} & 0 & \frac{1}{2}a_{14} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2}a_{12^m} \\
0 & \frac{1}{2}a_{21} & \frac{1}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}} & \frac{1}{2}a_{22} & 0 & \frac{1}{2}a_{23} & 0 & \frac{1}{2}a_{24} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2}a_{22^m} \\
0 & \frac{1}{2}a_{21} & -\frac{1}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}} & \frac{1}{2}a_{22} & 0 & \frac{1}{2}a_{23} & 0 & \frac{1}{2}a_{24} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2}a_{22^m} \\
0 & \frac{1}{2}a_{31} & 0 & \frac{1}{2}a_{32} & \frac{1}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}} & \frac{1}{2}a_{33} & 0 & \frac{1}{2}a_{34} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2}a_{32^m} \\
0 & \frac{1}{2}a_{31} & 0 & \frac{1}{2}a_{32} & -\frac{1}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}} & \frac{1}{2}a_{33} & 0 & \frac{1}{2}a_{34} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2}a_{32^m} \\
0 & \frac{1}{2}a_{41} & 0 & \frac{1}{2}a_{42} & 0 & \frac{1}{2}a_{43} & \frac{1}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}} & \frac{1}{2}a_{44} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2}a_{42^m} \\
0 & \frac{1}{2}a_{41} & 0 & \frac{1}{2}a_{42} & 0 & \frac{1}{2}a_{43} & -\frac{1}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}} & \frac{1}{2}a_{44} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2}a_{42^m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \frac{1}{2}a_{2^m1} & 0 & \frac{1}{2}a_{2^m2} & 0 & \frac{1}{2}a_{2^m3} & 0 & \frac{1}{2}a_{2^m4} & \cdots & \frac{1}{2^{\frac{1}{2}m}} & \frac{1}{2}a_{2^m2^m} \\
0 & \frac{1}{2}a_{2^m1} & 0 & \frac{1}{2}a_{2^m2} & 0 & \frac{1}{2}a_{2^m3} & 0 & \frac{1}{2}a_{2^m4} & \cdots & -\frac{1}{2^{\frac{1}{2}m}} & \frac{1}{2}a_{2^m2^m}
\end{pmatrix}$$

Así que, denotando por $|A|$ al determinante de la matriz A, se tiene:

$$\left|A^{(m+1)}\right|$$

$$= \frac{2}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}} \left| \begin{pmatrix}
\frac{1}{2}a_{11} & 0 & \frac{1}{2}a_{12} & 0 & \frac{1}{2}a_{13} & 0 & \frac{1}{2}a_{14} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2}a_{12^m} \\
\frac{1}{2}a_{21} & \frac{1}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}} & \frac{1}{2}a_{22} & 0 & \frac{1}{2}a_{23} & 0 & \frac{1}{2}a_{24} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2}a_{22^m} \\
\frac{1}{2}a_{21} & -\frac{1}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}} & \frac{1}{2}a_{22} & 0 & \frac{1}{2}a_{23} & 0 & \frac{1}{2}a_{24} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2}a_{22^m} \\
\frac{1}{2}a_{31} & 0 & \frac{1}{2}a_{32} & \frac{1}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}} & \frac{1}{2}a_{33} & 0 & \frac{1}{2}a_{34} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2}a_{32^m} \\
\frac{1}{2}a_{31} & 0 & \frac{1}{2}a_{32} & -\frac{1}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}} & \frac{1}{2}a_{33} & 0 & \frac{1}{2}a_{34} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2}a_{32^m} \\
\frac{1}{2}a_{41} & 0 & \frac{1}{2}a_{42} & 0 & \frac{1}{2}a_{43} & \frac{1}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}} & \frac{1}{2}a_{44} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2}a_{42^m} \\
\frac{1}{2}a_{41} & 0 & \frac{1}{2}a_{42} & 0 & \frac{1}{2}a_{43} & -\frac{1}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}} & \frac{1}{2}a_{44} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2}a_{42^m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{1}{2}a_{2^m1} & 0 & \frac{1}{2}a_{2^m2} & 0 & \frac{1}{2}a_{2^m3} & 0 & \frac{1}{2}a_{2^m4} & \cdots & \frac{1}{2^{\frac{1}{2}m}} & \frac{1}{2}a_{2^m2^m} \\
\frac{1}{2}a_{2^m1} & 0 & \frac{1}{2}a_{2^m2} & 0 & \frac{1}{2}a_{2^m3} & 0 & \frac{1}{2}a_{2^m4} & \cdots & -\frac{1}{2^{\frac{1}{2}m}} & \frac{1}{2}a_{2^m2^m}
\end{pmatrix} \right|$$

$$= \left(\frac{2}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}}\right)^2 \left| \begin{pmatrix}
\frac{1}{2}a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} & 0 & \frac{1}{2}a_{13} & 0 & \frac{1}{2}a_{14} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2}a_{12^m} \\
\frac{1}{2}a_{21} & \frac{1}{2}a_{22} & 0 & \frac{1}{2}a_{23} & 0 & \frac{1}{2}a_{24} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2}a_{22^m} \\
\frac{1}{2}a_{31} & \frac{1}{2}a_{32} & \frac{1}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}} & \frac{1}{2}a_{33} & 0 & \frac{1}{2}a_{34} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2}a_{32^m} \\
\frac{1}{2}a_{31} & \frac{1}{2}a_{32} & -\frac{1}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}} & \frac{1}{2}a_{33} & 0 & \frac{1}{2}a_{34} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2}a_{32^m} \\
\frac{1}{2}a_{41} & \frac{1}{2}a_{42} & 0 & \frac{1}{2}a_{43} & \frac{1}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}} & \frac{1}{2}a_{44} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2}a_{42^m} \\
\frac{1}{2}a_{41} & \frac{1}{2}a_{42} & 0 & \frac{1}{2}a_{43} & -\frac{1}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}} & \frac{1}{2}a_{44} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2}a_{42^m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{1}{2}a_{2^m1} & \frac{1}{2}a_{2^m2} & 0 & \frac{1}{2}a_{2^m3} & 0 & \frac{1}{2}a_{2^m4} & \cdots & \frac{1}{2^{\frac{1}{2}m}} & \frac{1}{2}a_{2^m2^m} \\
\frac{1}{2}a_{2^m1} & \frac{1}{2}a_{2^m2} & 0 & \frac{1}{2}a_{2^m3} & 0 & \frac{1}{2}a_{2^m4} & \cdots & -\frac{1}{2^{\frac{1}{2}m}} & \frac{1}{2}a_{2^m2^m}
\end{pmatrix} \right|$$

$$= \left(\frac{2}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}}\right)^3 \left| \begin{pmatrix}
\frac{1}{2}a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} & \frac{1}{2}a_{13} & 0 & \frac{1}{2}a_{14} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2}a_{12^m} \\
\frac{1}{2}a_{21} & \frac{1}{2}a_{22} & \frac{1}{2}a_{23} & 0 & \frac{1}{2}a_{24} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2}a_{22^m} \\
\frac{1}{2}a_{31} & \frac{1}{2}a_{32} & \frac{1}{2}a_{33} & 0 & \frac{1}{2}a_{34} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2}a_{32^m} \\
\frac{1}{2}a_{41} & \frac{1}{2}a_{42} & \frac{1}{2}a_{43} & \frac{1}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}} & \frac{1}{2}a_{44} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2}a_{42^m} \\
\frac{1}{2}a_{41} & \frac{1}{2}a_{42} & \frac{1}{2}a_{43} & -\frac{1}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}} & \frac{1}{2}a_{44} & \cdots & \cdots & \frac{1}{2}a_{42^m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{1}{2}a_{2^m1} & \frac{1}{2}a_{2^m2} & \frac{1}{2}a_{2^m3} & 0 & \frac{1}{2}a_{2^m4} & \cdots & \frac{1}{2^{\frac{1}{2}m}} & \frac{1}{2}a_{2^m2^m} \\
\frac{1}{2}a_{2^m1} & \frac{1}{2}a_{2^m2} & \frac{1}{2}a_{2^m3} & 0 & \frac{1}{2}a_{2^m4} & \cdots & -\frac{1}{2^{\frac{1}{2}m}} & \frac{1}{2}a_{2^m2^m}
\end{pmatrix} \right|$$

$$= \cdots = \left(\frac{2}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}}\right)^{2^m} \left| \begin{pmatrix}
\frac{1}{2}a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} & \frac{1}{2}a_{13} & \frac{1}{2}a_{14} & \cdots & \frac{1}{2}a_{12^m} \\
\frac{1}{2}a_{21} & \frac{1}{2}a_{22} & \frac{1}{2}a_{23} & \frac{1}{2}a_{24} & \cdots & \frac{1}{2}a_{22^m} \\
\frac{1}{2}a_{31} & \frac{1}{2}a_{32} & \frac{1}{2}a_{33} & \frac{1}{2}a_{34} & \cdots & \frac{1}{2}a_{32^m} \\
\frac{1}{2}a_{41} & \frac{1}{2}a_{42} & \frac{1}{2}a_{43} & \frac{1}{2}a_{44} & \cdots & \frac{1}{2}a_{42^m} \\
\frac{1}{2}a_{41} & \frac{1}{2}a_{42} & \frac{1}{2}a_{43} & \frac{1}{2}a_{44} & \cdots & \frac{1}{2}a_{42^m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{1}{2}a_{2^m1} & \frac{1}{2}a_{2^m2} & \frac{1}{2}a_{2^m3} & \frac{1}{2}a_{2^m4} & \cdots & \frac{1}{2}a_{2^m2^m}
\end{pmatrix} \right|$$

$$= \left(\frac{2}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}}\right)^{2^m} \frac{1}{2^{2m}} \left|A^{(m)}\right| = \left(\frac{1}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}}\right)^{2^m} \left|A^{(m)}\right|$$

Así que, $\left|A^{(m+1)}\right| \neq 0$, por lo tanto, la matriz $A^{(m+1)}$ es invertible.

Queda entonces demostrada la propiedad 2.

Pasemos a probar la propiedad 3.

Por la propiedad 2, el vector $B^{(m+1)}$ tiene distribución normal multivariada, así que para demostrar que sus componentes forman una familia de variables aleatorias independientes, basta con probar que son independientes por parejas.

Si $j \in \{1, 3, 5, \ldots, 2^{m+1} - 1\}$, se tiene:

$$B_{\frac{j}{2^{m+1}}} - B_{\frac{j-1}{2^{m+1}}} = \frac{1}{2}\left(B_{\frac{j+1}{2^{m+1}}} - B_{\frac{j-1}{2^{m+1}}}\right) + \frac{1}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}} Z_{\frac{j}{2^{m+1}}}$$

Si $j \in \{2, 4, 6, \ldots, 2^{m+1} - 2\}$, se tiene:

$$B_{\frac{j}{2^{m+1}}} - B_{\frac{j-1}{2^{m+1}}} = \frac{1}{2}\left(B_{\frac{j}{2^{m+1}}} - B_{\frac{j-2}{2^{m+1}}}\right) - \frac{1}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}} Z_{\frac{j-1}{2^{m+1}}}$$

Así que las componentes del vector $B^{(m+1)}$ tienen la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} B_{\frac{1}{2^{m+1}}} - B_0 \\ B_{\frac{2}{2^{m+1}}} - B_{\frac{1}{2^{m+1}}} \\ B_{\frac{3}{2^{m+1}}} - B_{\frac{2}{2^{m+1}}} \\ B_{\frac{4}{2^{m+1}}} - B_{\frac{3}{2^{m+1}}} \\ B_{\frac{5}{2^{m+1}}} - B_{\frac{4}{2^{m+1}}} \\ B_{\frac{6}{2^{m+1}}} - B_{\frac{5}{2^{m+1}}} \\ \vdots \\ B_{\frac{2^{m+1}-3}{2^{m+1}}} - B_{\frac{2^{m+1}-4}{2^{m+1}}} \\ B_{\frac{2^{m+1}-2}{2^{m+1}}} - B_{\frac{2^{m+1}-3}{2^{m+1}}} \\ B_{\frac{2^{m+1}-1}{2^{m+1}}} - B_{\frac{2^{m+1}-2}{2^{m+1}}} \\ B_{\frac{2^{m+1}}{2^{m+1}}} - B_{\frac{2^{m+1}-1}{2^{m+1}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(B_{\frac{2}{2^{m+1}}} - B_0\right) + \frac{1}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}} Z_{\frac{1}{2^{m+1}}} \\ \frac{1}{2}\left(B_{\frac{2}{2^{m+1}}} - B_0\right) - \frac{1}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}} Z_{\frac{1}{2^{m+1}}} \\ \frac{1}{2}\left(B_{\frac{4}{2^{m+1}}} - B_{\frac{2}{2^{m+1}}}\right) + \frac{1}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}} Z_{\frac{3}{2^{m+1}}} \\ \frac{1}{2}\left(B_{\frac{4}{2^{m+1}}} - B_{\frac{2}{2^{m+1}}}\right) - \frac{1}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}} Z_{\frac{3}{2^{m+1}}} \\ \frac{1}{2}\left(B_{\frac{6}{2^{m+1}}} - B_{\frac{4}{2^{m+1}}}\right) + \frac{1}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}} Z_{\frac{5}{2^{m+1}}} \\ \frac{1}{2}\left(B_{\frac{6}{2^{m+1}}} - B_{\frac{4}{2^{m+1}}}\right) - \frac{1}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}} Z_{\frac{5}{2^{m+1}}} \\ \vdots \\ \frac{1}{2}\left(B_{\frac{2^{m+1}-2}{2^{m+1}}} - B_{\frac{2^{m+1}-2}{2^{m+1}}}\right) + \frac{1}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}} Z_{\frac{2^{m+1}-3}{2^{m+1}}} \\ \frac{1}{2}\left(B_{\frac{2^{m+1}-2}{2^{m+1}}} - B_{\frac{2^{m+1}-4}{2^{m+1}}}\right) - \frac{1}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}} Z_{\frac{2^{m+1}-3}{2^{m+1}}} \\ \frac{1}{2}\left(B_{\frac{2^{m+1}}{2^{m+1}}} - B_{\frac{2^{m+1}-2}{2^{m+1}}}\right) + \frac{1}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}} Z_{\frac{2^{m+1}-1}{2^{m+1}}} \\ \frac{1}{2}\left(B_{\frac{2^{m+1}}{2^{m+1}}} - B_{\frac{2^{m+1}-2}{2^{m+1}}}\right) - \frac{1}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}} Z_{\frac{2^{m+1}-1}{2^{m+1}}} \end{pmatrix}$$

Como puede verse, cada par de esas componentes es de uno de dos tipos:

1. una componente tiene la forma $X + Y$ y la otra tiene la forma $X - Y$, donde X y Y son variables aleatorias independientes, ambas con distribución normal de media cero y varianza $\frac{1}{2^{m+2}}$.

2. Una componente tiene la forma X_1+Y_1 y la otra tiene la forma X_2+Y_2, donde X_1, Y_1, X_2, Y_2 son variables aleatorias independientes por parejas, todas ellas con distribución normal de media cero y varianza $\frac{1}{2^{m+2}}$.

En el primer caso se tiene:

$E\left[(X+Y)(X-Y)\right] = E\left[X^2 - Y^2\right] = E\left[X^2\right] - E\left[Y^2\right] = \frac{1}{2^{m+2}} - \frac{1}{2^{m+2}} = 0$

En el segundo caso se tiene:

$E\left[(X_1+Y_1)(X_2+Y_2)\right] = E\left[X_1X_2\right] + E\left[X_1X_2\right] + E\left[Y_1X_2\right] + E\left[Y_1Y_2\right] = 0$

Así que la matriz de covarianzas del vector aleatorio $B^{(m+1)}$ es diagonal. Por lo tanto, sus componentes forman una familia de variables aleatorias independientes. Además, la distribución de cada componente es normal con media cero y varianza $\frac{2}{2^{m+2}} = \frac{1}{2^{m+1}}$.

Queda entonces demostrada la propiedad 3.

PARTE 3.

Proposición 2. *Existe un conjunto $E \in \mathcal{L}$ de probabilidad 1 tal que si $\omega \in E$, entonces la sucesión de funciones $\left(f_n^{(\omega)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en el intervalo $[0,1]$.*

Demostración

Denotemos por $f^{(\omega)}$ al límite de la sucesión $\left(f_n^{(\omega)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Obsérvese que si $\omega \in E$ y $t \in D$, entonces $f^{(\omega)}(t) = B_t(\omega)$.

Si $\omega \in E$ y $t \in [0,1]$, definamos $B_t(\omega) = f^{(\omega)}(t)$. Si $\omega \notin E$, definamos (redefinimos si $t \in D$) $B_t(\omega) = 0$ para cualquier $t \in [0,1]$. De esta forma, tenemos definida a la variable aleatoria B_t para cualquier t en el intervalo $[0,1]$. La construcción se hizo de tal manera que, fijando $\omega \in \Omega$, la función $t \to B_t(\omega)$, definida en el intervalo $[0,1]$, es continua para cualquier $\omega \in \Omega$.

Para demostrar esta parte observemos primero lo siguiente:

Recordemos que para cada conjunto D_n se definen 2^n+1 variables aleatorias, una para cada elemento de D_n. Por la manera en que se definen estas variables, en realidad, cuando se definen las variables para $t \in D_n$, ya están definidas varias de ellas, a saber, las que corresponden a los valores de t que pertenecen a D_{n-1}, es decir, los elementos de D_n de la forma $\frac{j}{2^n}$ con $j \in \{0, 2, 4, \ldots, 2^n\}$; así que los nuevos elementos que se definen son únicamente 2^{n-1}.

Una vez definidos todos los elementos correspondientes a D_n, para cada $\omega \in \Omega$, se tienen 2^n+1 en el plano:

$\left(t_0, B_{t_0}(\omega)\right), \left(t_1, B_{t_1}(\omega)\right), \left(t_2, B_{t_2}(\omega)\right), \ldots, \left(t_{2^n}, B_{t_{2^n}}(\omega)\right)$

Cada par de puntos consecutivos de ese conjunto se une mediante un segmento de recta de manera que se obtiene la gráfica de una función continua, lineal por pedazos, y estamos denotando por $f_n^{(\omega)}$ a la función que se obtiene.

Consideremos $t_j = \frac{j}{2^n}$ y $t_{j+1} = \frac{j+1}{2^n}$dos puntos consecutivos correspondientes a D_n. Como $f_n^{(\omega)}$ es lineal entre esos puntos, se tiene:

$$f_n^{(\omega)}\left(\frac{t_j+t_{j+1}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(B_{t_j} + B_{t_{+1}}\right)$$

En el siguiente paso se considera el conjunto D_{n+1}, para el cual uno de los puntos que se agrega es $\frac{t_j+t_{j+1}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{j}{2^n} + \frac{j+1}{2^n}\right) = \frac{2j+1}{2^{n+1}}$ y se define:

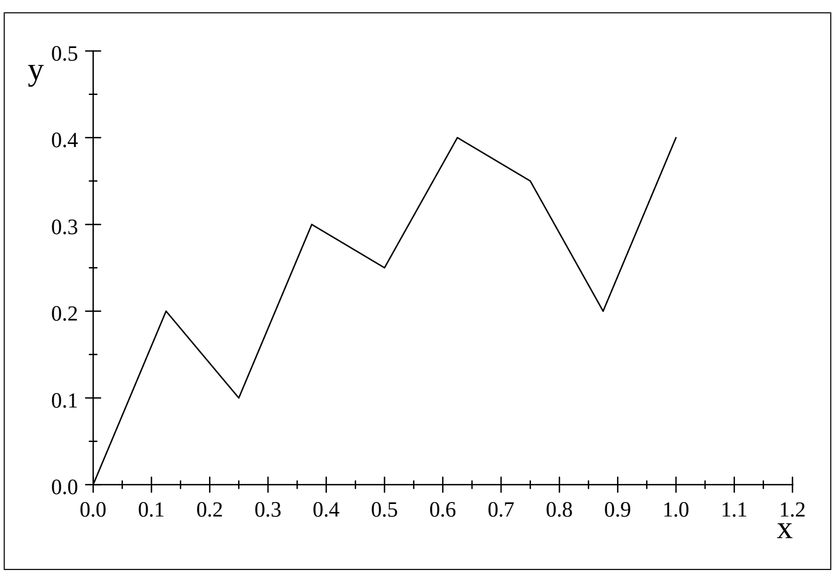
$$B_{\frac{t_j+t_{j+1}}{2}} = \frac{1}{2}\left(B_{t_j} + B_{t_{+1}}\right) + \frac{1}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}} Z_{\frac{2j+1}{2^{m+1}}} = f_n^{(\omega)}\left(\frac{t_j+t_{j+1}}{2}\right) + \frac{1}{2^{\frac{1}{2}(m+2)}} Z_{\frac{2j+1}{2^{m+1}}}(\omega)$$

Así que:

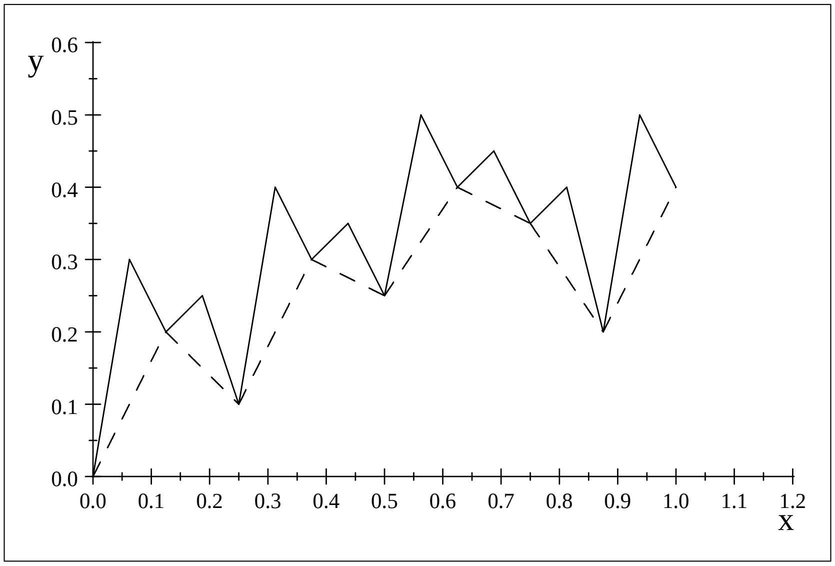
$$f_{n+1}^{(\omega)}\left(\frac{t_j+t_{j+1}}{2}\right) - f_n^{(\omega)}\left(\frac{t_j+t_{j+1}}{2}\right) = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}(n+2)}} Z_{\frac{2j+1}{2^{n+1}}}(\omega)$$

Finalmente, obsérvese que el valor máximo de $\left|f_{n+1}^{(\omega)}(t) - f_n^{(\omega)}(t)\right|$, para $t \in [t_j, t_{j+1}]$, se obtiene cuando $t = \frac{t_j+t_{j+1}}{2}$, así que:

$$\sup\left\{\left|f_{n+1}^{(\omega)}(t) - f_n^{(\omega)}(t)\right| : t \in \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right]\right\} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}(n+2)}}\left|Z_{\frac{2j+1}{2^{n+1}}}\right|$$



n = 3



n = 4

Lo que queremos demostrar es que, para cada $\omega \in \Omega$, la sucesión de funciones $\left(f_n^{(\omega)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en el intervalo $[0,1]$.

Recordemos que si $\mathbf{C} = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$ y, para $f \in \mathbf{C}$, definimos:

$\|f\|_s = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$,

entonces $\|\|_s$ es una norma y que $\mathbf{C}$, con esa norma, es un espacio normado completo, es decir, cualquier sucesión de Cauchy es convergente. Además, una sucesión de funciones en $\mathbf{C}$ converge con la norma $\|\|_s$ si y sólo si converge uniformemente.

Por lo anterior, si $n \in \{0,1,2,3\ldots\}$, dada $\varepsilon_n > 0$, se tiene:

$$P\left[\left\{\omega \in \Omega : \left\|f_{n+1}^{(\omega)} - f_n^{(\omega)}\right\|_s \leq \varepsilon_n\right\}\right]$$

$$P\left[\bigcup_{j=0}^{2^n-1}\left\{\omega \in \Omega : \sup\left\{\left|f_{n+1}^{(\omega)}(t) - f_n^{(\omega)}(t)\right| : t \in \left[\tfrac{j}{2^n}, \tfrac{j+1}{2^n}\right]\right\} \geq \varepsilon_n\right\}\right]$$

$$= P\left[\bigcup_{j=0}^{2^m-1}\left\{\omega \in \Omega : \frac{1}{2^{\frac{1}{2}(n+2)}}\left|Z_{\frac{2j+1}{2^{n+1}}}(\omega)\right| \geq \varepsilon_n\right\}\right]$$

$$\leq \sum_{j=0}^{2^n-1} P\left[\left\{\omega \in \Omega : \frac{1}{2^{\frac{1}{2}(n+2)}}\left|Z_{\frac{2j+1}{2^{n+1}}}(\omega)\right| \geq \varepsilon_n\right\}\right]$$

$$= \sum_{j=0}^{2^n-1} P\left[\left\{\omega \in \Omega : \left|Z_{\frac{2j+1}{2^{n+1}}}(\omega)\right| \geq 2^{\frac{1}{2}(n+2)}\varepsilon_n\right\}\right]$$

Ahora bien, si X es una variable aleatoria con distribución normal estándar, se tiene, para cualquier $x > 0$:

$$P[X \geq x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty e^{-\frac{1}{2}y^2}dy \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty \frac{y}{x}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Así que:

$P[|X| \geq x] \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{2}x^2}$

Por lo tanto:

$P\left[\left\{\omega \in \Omega : \left\| {}_s f_{n+1}^{(\omega)} - f_n^{(\omega)} \right\|_s \geq \varepsilon_n \right\}\right]$

$\leq \sum_{j=0}^{2^n-1} P\left[\left\{\omega \in \Omega : \left| Z_{\frac{2j+1}{2^{n+1}}}(\omega) \right| \geq 2^{\frac{1}{2}(n+2)} \varepsilon_n \right\}\right]$

$\leq 2^n \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2^{\frac{1}{2}(n+2)} \varepsilon_n} e^{-\frac{1}{2}\left(2^{\frac{1}{2}(n+2)} \varepsilon_n\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2^{\frac{1}{2}n}}{\varepsilon_n} e^{-2^{n+1} \varepsilon_n^2}$

En el siguiente paso es donde vamos a utilizar el lema de Borel-Cantelli, el cual asegura que si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de eventos tales que $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, entonces:

$P[\{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ para una infinidad de valores de } n\}] = 0$

Para poderlo aplicar necesitamos demostrar entonces que la serie:

$\sum_{n=0}^{\infty} P\left[\left\{\omega \in \Omega : \left\| {}_s f_{n+1}^{(\omega)} - f_n^{(\omega)} \right\|_s \geq \varepsilon_n \right\}\right]$

es convergente, lo cual demostraremos probando que la serie:

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2^{\frac{1}{2}n}}{\varepsilon_n} e^{-2^{n+1} \varepsilon_n^2}$

es convergente.

Para esto, y también para lo que sigue, tenemos que elegir un valor adecuado de ε_n.

Tomemos $\varepsilon_n = \frac{1}{2^{\frac{1}{4}(n+1)}}$. Entonces:

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2^{\frac{1}{2}n}}{\varepsilon_n} e^{-2^{n+1} \varepsilon_n^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\frac{1}{4}(3n+1)} e^{-2^{\frac{1}{2}(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{\frac{1}{4}(3n+1)}}{e^{2^{\frac{1}{2}(n+1)}}}$

$< \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{\frac{1}{4}(3n+1)}}{2^{2^{\frac{1}{2}(n+1)}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\frac{1}{4}(3n+1) - 2^{\frac{1}{2}(n+1)}}$

$< \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{5} 2^{\frac{1}{4}(3n+1) - 2^{\frac{1}{2}(n+1)}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty$

Por lo tanto, la serie:

$\sum_{n=0}^{\infty} P\left[\left\{\omega \in \Omega : \left\| f_{n+1}^{(\omega)} - f_n^{(\omega)} \right\|_s \geq \frac{1}{2^{\frac{1}{4}(n+1)}} \right\}\right]$

es convergente.

Así que, por el lema de Borel-Cantelli:

$P\left[\left\{\omega \in \Omega : \left\|{}_s f_{n+1}^{(\omega)} - f_n^{(\omega)}\right\|_s \geq \frac{1}{2^{\frac{1}{4}(n+1)}} \text{ para una infinidad de valores de } n\right\}\right] = 0$

Por lo tanto:

$P\left[\left\{\omega \in \Omega : \text{Existe } N_\omega \in \mathbb{N} \text{ tal que } \left\|f_{n+1}^{(\omega)} - f_n^{(\omega)}\right\|_s < \frac{1}{2^{\frac{1}{4}(n+1)}} \text{ para cualquier } n \geq N_\omega\right\}\right]$

$= 1$

Sea $E = \left\{\omega \in \Omega : \text{Existe } N_\omega \in \mathbb{N} \text{ tal que } \left\|f_{n+1}^{(\omega)} - f_n^{(\omega)}\right\|_s < \frac{1}{2^{\frac{1}{4}(n+1)}} \text{ para cualquier } n \geq N_\omega\right\}$

Para cualquier $\omega \in E$ y $m \in \mathbb{N}$ y cualquier $n \geq N_\omega$, se tiene entonces:

$\left\|f_{n+m}^{(\omega)} - f_n^{(\omega)}\right\|_s \leq \sum_{k=0}^{m-1} \left\|f_{n+k+1}^{(\omega)} - f_{n+k}^{(\omega)}\right\|_s < \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2^{\frac{1}{4}(n+k+1)}}$

$< \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2^{n+k+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^{n+1}}$

Dada $\varepsilon > 0$, tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $N \geq N_\omega$ y $\frac{1}{2^{N+1}} < \varepsilon$. Entonces:

$\left\|f_m^{(\omega)} - f_n^{(\omega)}\right\|_s < \varepsilon$ para cualquier pareja de números naturales n y m mayores o iguales que N.

Así que la sucesión $\left(f_n^{(\omega)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y, por lo tanto, converge.

■

PARTE 4.

Teorema 1. *Consideremos el espacio de probabilidad* $([0,1], \mathcal{L}, P)$, *donde* $\mathcal{L}$ *es la* σ*-álgebra de los conjuntos Lebesgue medibles en el intervalo* $[0,1]$ *y* P *es la medida de Lebesgue en el intervalo* $[0,1]$. *Se puede definir sobre* $([0,1], \mathcal{L}, P)$ *una familia de variables aleatorias* $(W_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ *(es decir, un proceso estocástico) el cual satisface las siguientes propiedades:*

1. Existe un conjunto Lebesgue-medible A, de probabilidad 1, tal que, para cada $\omega \in A$, las funciones $t \to W_t(\omega)$ son continuas.
2. $E[W_t] = 0$ para toda t.
3. Dados $0 \leq s < t$, $W_t - W_s$ es independiente de la trayectoria seguida hasta el tiempo s.
4. Dados $0 \leq s < t$, la distribución de $W_t - W_s$ es normal con media cero y varianza $t - s$.

Demostración

Consideremos una sucesión de procesos independientes $\left(\left(B_t^{(n)}\right)_{t\in[0,1]}\right)_{n\in\mathbb{Z}^+}$, cada uno de ellos construidos como se indicó antes:

Para mostrar que esto es posible, consideremos la familia inicial $\{Z_t : t \in D\}$, la cual es numerable. Denotémosla entonces por:

$\{Z_{t_1}, Z_{t_2}, Z_{t_3}, \ldots\}$

Ordenemos los elementos de la sucesión $(Z_{t_n})_{n\in\mathbb{N}}$ de la siguiente manera:

$Z_{t_1}, Z_{t_2}, Z_{t_4}, Z_{t_7}, Z_{t_{11}}, Z_{t_{16}}, Z_{t_{22}}, \ldots$

$Z_{t_3}, Z_{t_5}, Z_{t_8}, Z_{t_{12}}, Z_{t_{17}}, Z_{t_{23}}, \ldots$

$Z_{t_6}, Z_{t_9}, Z_{t_{13}}, Z_{t_{18}}, Z_{t_{24}}, \ldots$

$Z_{t_{10}}, Z_{t_{14}}, Z_{t_{19}}, Z_{t_{25}}, \ldots$

$Z_{t_{15}}, Z_{t_{20}}, Z_{t_{26}}, \ldots$

$Z_{t_{21}}, Z_{t_{27}}, \ldots$

$Z_{t_{28}}, \ldots$

$\vdots$

Cada renglón forma una subsucesión de $(Z_{t_n})_{n\in\mathbb{N}}$ y las subsucesiones de dos renglones diferentes no tienen elementos en común.

Renombremos los elementos de esas sucesiones:

Las variables aleatorias del n-simo renglón forman una sucesión $\left(Z_{t_k}^{(n)}\right)_{t_k\in\mathbb{D}}$.

Con la familia de variables aleatorias $\left\{Z_t^{(n)} : t \in D\right\}$ construimos entonces el proceso $\left(B_t^{(n)}\right)_{t\in[0,1]}$. De esta forma, los procesos así definidos son independientes unos de otros.

Viéndolo por pasos, en el paso 1 definimos el proceso $(B_t)_{t\in[0,1]}$ como se indicó antes. A ese proceso lo renombramos como $\left(B_t^{(1)}\right)_{t\in[0,1]}$.

En el paso 2 definimos un nuevo proceso $(B_t)_{t\in[0,1]}$ como se indicó antes, pero de tal manera que este nuevo proceso sea independiente del primero. A este segundo proceso lo renombramos como $\left(B_t^{(2)}\right)_{t\in[0,1]}$.

Continuamos con este procedimiento, de tal manera que en cada paso construyamos un proceso $(B_t)_{t\in[0,1]}$ como se indicó antes, pero de tal manera que este nuevo proceso sea independiente de los anteriores.

Se obtiene entonces una sucesión de procesos $\left(\left(B_t^{(n)}\right)_{t\in[0,1]}\right)_{n\in\mathbb{Z}^+}$, cada uno de ellos con las propiedades que caracterizan al movimiento browniano e independiente de todos los demás.

Para definir el proceso $(W_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$, podemos hacer antes el paso que se describe a continuación.

Para cada proceso $\left(B_t^{(n)}\right)_{t\in[0,1]}$ se tiene un conjunto $E_n \in \mathcal{A}$ de probabilidad 1 en el cual se tiene la convergencia uniforme de las correspondientes funciones lineales por pedazos.

Definamos $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$. Entonces $E \in \mathcal{A}$ y $P(A) = 1$.

Para cada $\omega \notin E$, redefinamos $B_t^{(n)}(\omega) = 0$ para cualquier $t \in [0,1]$.

Ahora, para cada $\omega \in \Omega$, definamos:

$W_t(\omega) = B_t^{(1)}(\omega)$ si $t \in [0,1)$.

$W_t(\omega) = B_1^{(1)}(\omega) + B_{t-1}^{(2)}(\omega)$ si $t \in [1,2)$.

$W_t(\omega) = B_1^{(1)}(\omega) + B_1^{(2)}(\omega) + B_{t-2}^{(2)}(\omega)$ si $t \in [2,3)$.

Y así sucesivamente, de manera que en el paso n se tiene:

$W_t(\omega) = \sum_{k=1}^{n-1} B_1^{(k)}(\omega) + B_{t-(n-1)}^{(n)}(\omega)$ si $t \in [n-1,n)$.

El proceso estocástico $(W_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ así definido satisface las propiedades del enunciado del teorema.

$\blacksquare$